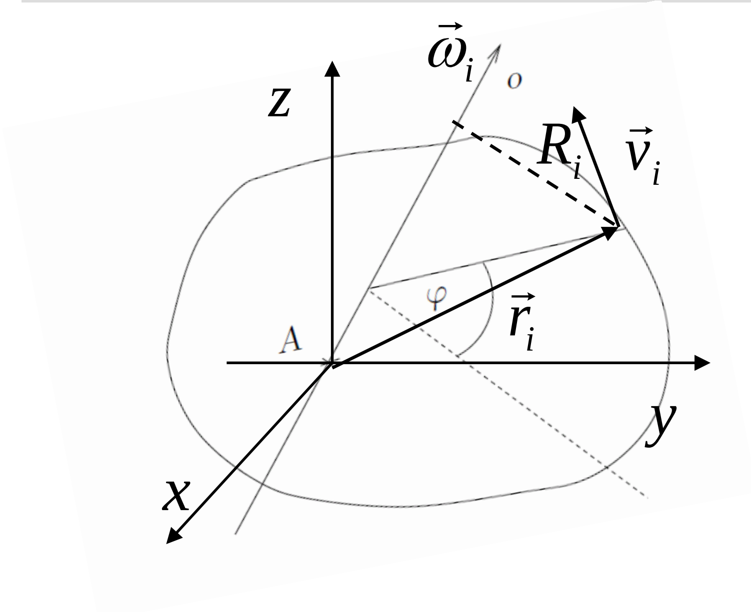
Opakování - Tuhá soustava hmotných bodů –Tuhé těleso



- 2) Obecnějším pohybem tuhého tělesa je pohyb, při kterém pouze jeden jeho bod *A* zachovává v tělese i prostoru stálou polohu. Tento pohyb nazýváme **rotací tuhého tělesa kolem pevného bodu**.
- Zavedeme vektor úhlové rychlosti, jehož směr je shodný s osou otáčení, která se může měnit s časem, pak podle **Eulerovy věty** je rychlost libovolného bodu otáčejícího se tělesa dána vzorcem :

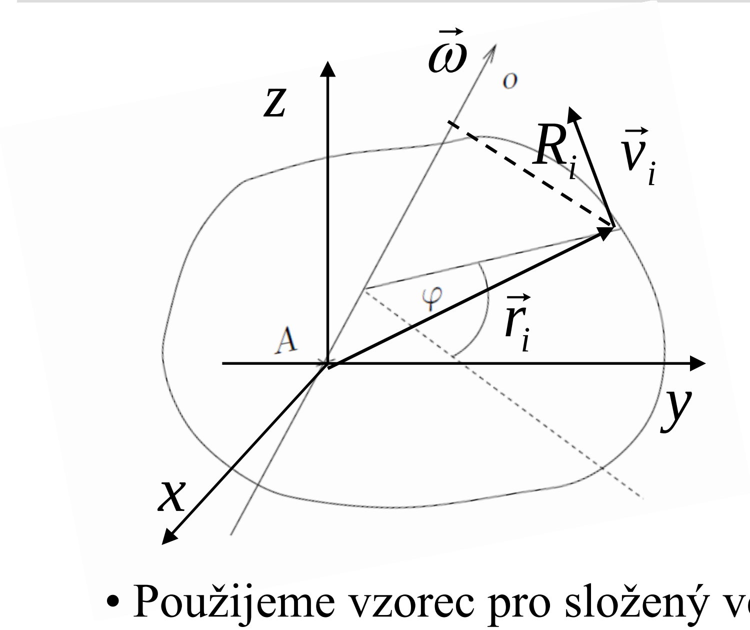
$$\vec{v} = \vec{\omega}(t) \times \vec{r}, \quad v = \omega r \sin\alpha = \omega R$$

- Pohyb při kterém mají všechny body tuhého tělesa stejný vektor rychlosti nazýváme posuvným nebo-li translačním pohybem: $\vec{v}_T = \vec{v}_T(t)$

- Podle **Chaslesovy věty** lze libovolný pohyb tuhého tělesa složit z posuvného pohybu a rotace kolem pevného bodu. Rychlost libovolného bodu tuhého tělesa lze určit složením rychlosti jednoho libovolného bodu *A* tělesa a rychlosti dané otáčením kolem tohoto bodu:

$$v(t) = \vec{v}_T(t) + \vec{\omega}(t) \times \vec{r}$$

Tuhé těleso – otáčení kolem pevného bodu – tenzor momentu setrvačnosti



• podle **Eulerovy věty** je rychlost libovolného bodu otáčejícího se tělesa kolem pevného bodu dána vzorcem :

$$\vec{v}_i(t) = \vec{\omega}(t) \times \vec{r}_i(t), \quad v_i = \omega r_i \sin\alpha = \omega R_i$$

• Potom moment hybnosti celého tělesa je dán vztahem:

$$\vec{B} = \sum_{i=1}^{N} \left[\vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i \right] = \sum_{i=1}^{N} \left[m_i \vec{r}_i \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_i \right) \right]$$

• Použijeme vzorec pro složený vektorový součin: $\vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c} \right) = \left(\vec{a} \cdot \vec{c} \right) \cdot \vec{b} - \left(\vec{a} \cdot \vec{b} \right) \cdot \vec{c}$

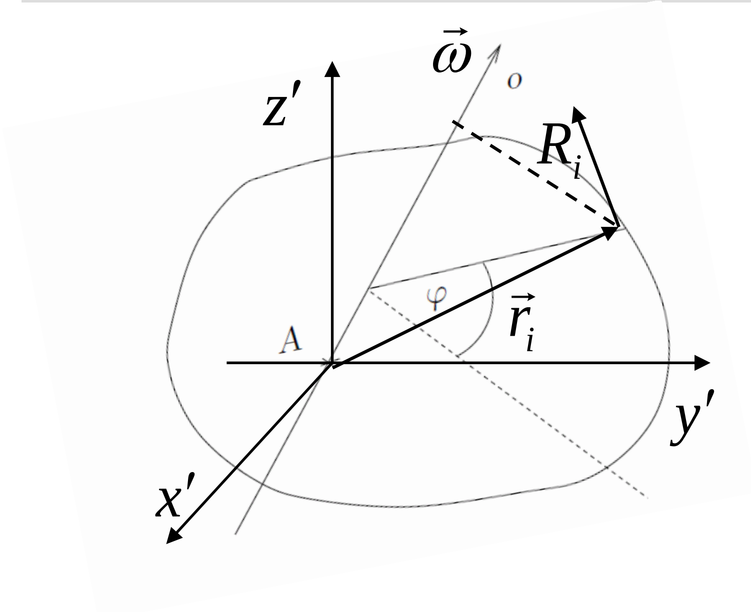
• a pro moment hybnosti celého tělesa dostaneme:

$$\vec{B} = \sum_{i=1}^{N} \left[m_i \vec{r}_i \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_i \right) \right] = \sum_{i=1}^{N} m_i \left[r_i^2 \cdot \vec{\omega} - \left(\vec{\omega} \cdot \vec{r}_i \right) \cdot \vec{r}_i \right]$$

• Celkový moment hybnosti není obecně rovnoběžný s vektorem úhlové rychlosti. Toto je příčina složitého chování tuhých těles při rotaci kolem pevného bodu. Navíc jsou všechny tři veličiny v tomto vztahu časově závislé: $\vec{B} = \vec{B}(t), \vec{r}_i = \vec{r}_i(t), \vec{\omega} = \vec{\omega}(t)$

• Nelze tedy zavést časově nezávislý moment setrvačnosti jako v případě otáčení kolem pevné osy.

Tuhé těleso – otáčení kolem pevného bodu – tenzor momentu setrvačnosti



• Vybereme-li k popisu rotace namísto laboratorní soustavy soustavu pevně spojenou s rotujícím tělesem. Počátek této soustavy zvolíme v počátku laboratorní soustavy. Označíme-li v soustavě pevně spojené s rotujícím tělesem složky vektorů:

$$\vec{B} \equiv (\beta_x, \beta_y, \beta_z),\ \vec{r}_i \equiv (x_i', y_i', z_i'),\ \vec{\omega} \equiv (\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z)$$

$$\vec{B} = \sum_{i=1}^{N} \left[m_i \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) \right] = \sum_{i=1}^{N} m_i \left[r_i^2 \cdot \vec{\omega} - (\vec{\omega} \cdot \vec{r}_i) \cdot \vec{r}_i \right]$$

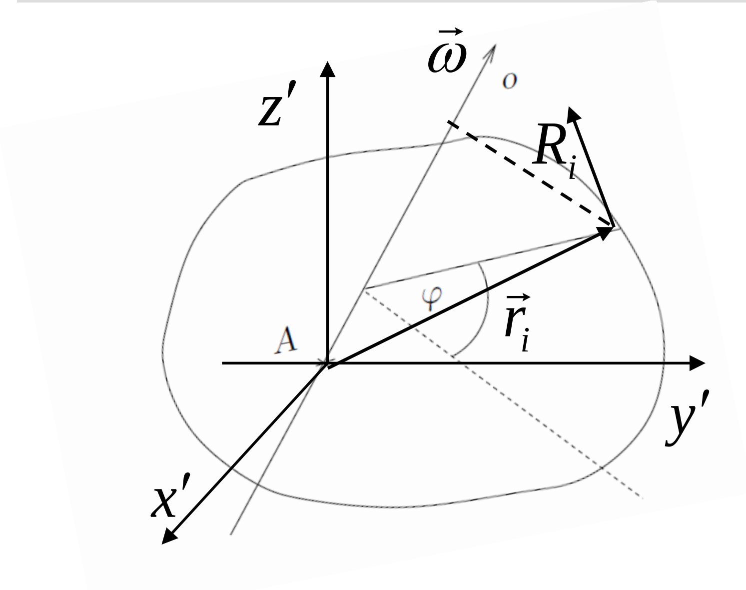
• Potom můžeme vektorovou rovnici rozepsat na složky:

$$\beta_x = \Omega_x \sum_{i=1}^{N} m_i \left(y_i'^2 + z_i'^2 \right) - \Omega_y \sum_{i=1}^{N} m_i x_i' y_i' - \Omega_z \sum_{i=1}^{N} m_i x_i' z_i'$$

$$\beta_y = -\Omega_x \sum_{i=1}^{N} m_i x_i' y_i' + \Omega_y \sum_{i=1}^{N} m_i \left(x_i'^2 + z_i'^2 \right) - \Omega_z \sum_{i=1}^{N} m_i y_i' z_i'$$

$$\beta_z = -\Omega_x \sum_{i=1}^{N} m_i x_i' z_i' - \Omega_y \sum_{i=1}^{N} m_i y_i' z_i' + \Omega_3 \sum_{i=1}^{N} m_z \left(x_i'^2 + y_i'^2 \right)$$

Tuhé těleso – otáčení kolem pevného bodu – tenzor momentu setrvačnosti



• Vybereme-li k popisu rotace namísto laboratorní soustavy soustavu pevně spojenou s rotujícím tělesem.

$$\vec{B} = \sum_{i=1}^{N} \left[m_i \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) \right] = \sum_{i=1}^{N} m_i \left[r_i^2 \cdot \vec{\omega} - (\vec{\omega} \cdot \vec{r}_i) \cdot \vec{r}_i \right]$$

• Polohové vektory jsou tedy časově neproměnné a vektorovou rovnici můžeme formálně zapsat jako:

$$\vec{B} = \overleftrightarrow{\boldsymbol{J}} \vec{\omega} \Rightarrow \beta_i = \sum_{j=x,y,z}^{3} J_{ij} \Omega_j, \quad i = x, y, z$$

• A pro složky tenzoru setrvačnosti tedy dostaneme:

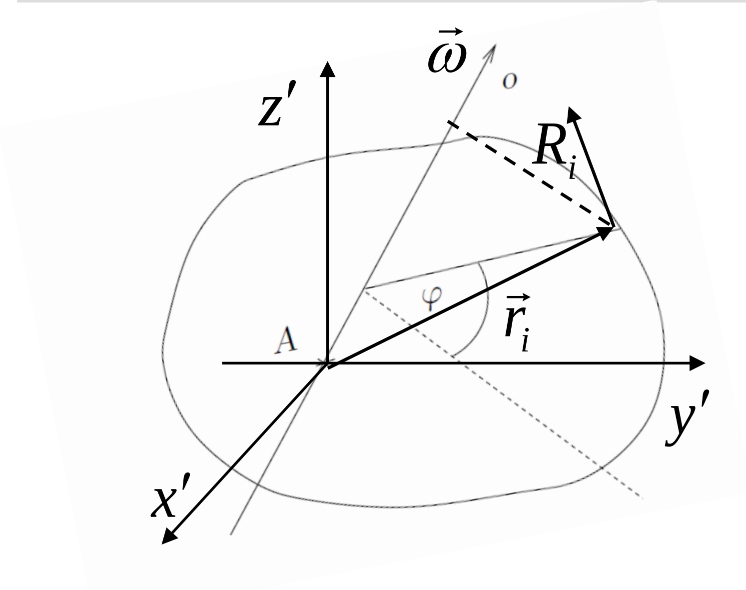
Momenty setrvačnosti vzhledem k příslušným osám soustavy souřadné otáčející se s tělesem

$$J_{xx} = \sum_{i=1}^{N} m_i \left(y_i'^2 + z_i'^2 \right), \quad J_{xy} = J_{yx} = -\sum_{i=1}^{N} m_i x_i' y_i'$$

$$J_{yy} = \sum_{i=1}^{N} m_i \left(x_i'^2 + z_i'^2 \right), \quad J_{xz} = J_{zx} = -\sum_{i=1}^{N} m_i x_i' z_i'$$

$$J_{zz} = \sum_{i=1}^{N} m_i \left(x_i'^2 + y_i'^2 \right), \quad J_{yz} = J_{zy} = -\sum_{i=1}^{N} m_i y_i' z_i'$$

Tuhé těleso – otáčení kolem pevného bodu – tenzor momentu setrvačnosti



• Vybereme-li k popisu rotace namísto laboratorní soustavy soustavu pevně spojenou s rotujícím tělesem.

$$\vec{B} = \sum_{i=1}^{N} \left[m_i \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) \right] = \sum_{i=1}^{N} m_i \left[r_i^2 \cdot \vec{\omega} - (\vec{\omega} \cdot \vec{r}_i) \cdot \vec{r}_i \right]$$

• Polohové vektory jsou tedy časově neproměnné a vektorovou rovnici můžeme formálně zapsat jako:

$$\vec{B} = \overleftrightarrow{J} \vec{\omega} \Rightarrow \beta_i = \sum_{j=x,y,z}^{3} J_{ij} \Omega_j, \quad i = x, y, z$$

• A pro složky tenzoru setrvačnosti tedy dostaneme:

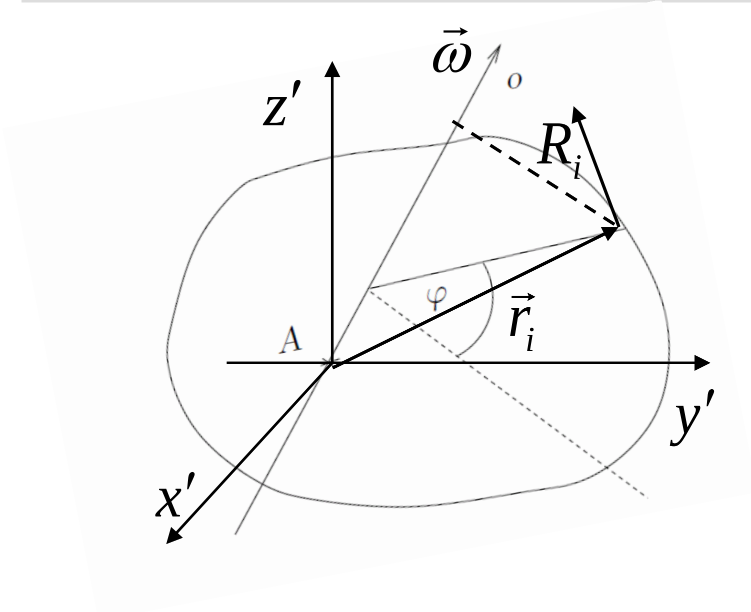
$$J_{xx} = \sum_{i=1}^{N} m_i \left(y_i'^2 + z_i'^2 \right), \quad J_{xy} = J_{yx} = -\sum_{i=1}^{N} m_i x_i' y_i'$$

$$J_{yy} = \sum_{i=1}^{N} m_i \left(x_i'^2 + z_i'^2 \right), \quad J_{xz} = J_{zx} = -\sum_{i=1}^{N} m_i x_i' z_i'$$

$$J_{zz} = \sum_{i=1}^{N} m_i \left(x_i'^2 + y_i'^2 \right), \quad J_{yz} = J_{zy} = -\sum_{i=1}^{N} m_i y_i' z_i'$$

Deviační momenty, souvissející s momenty odstředivých sil, které působí na okamžitou osu rotace tělesa

Tuhé těleso – otáčení kolem pevného bodu – tenzor momentu setrvačnosti



• Moment setrvačnosti je tedy tenzorová veličina. Tenzor momentu setrvačnosti je symetrický tenzor 2. řádu:

$$\overleftrightarrow{\boldsymbol{J}} = \begin{pmatrix} J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{xy} & J_{yy} & J_{yz} \\ J_{xz} & J_{yz} & J_{zz} \end{pmatrix}$$

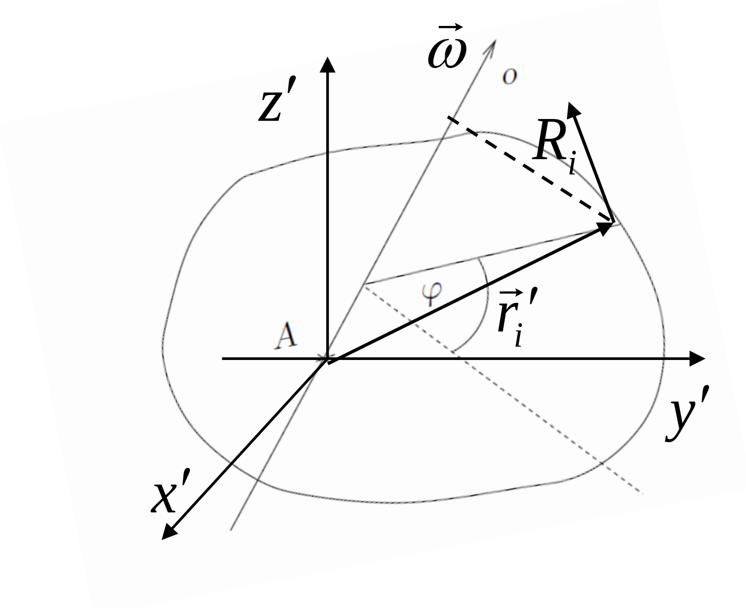
• Soustavu souřadnou spjatou s tělesem lze zvolit tedy tak, aby deviační momenty byly rovny nule. Vektor hybnosti lze potom psát jako:

$$\vec{B} = J\vec{\omega}, \quad tedy \quad \beta_i = J\,\Omega_i \quad \Rightarrow \quad J\,\Omega_i = \sum_{j=x,y,z} J_{ij}\Omega_j, \quad kde \quad i, j = x, y, z = 1,2,3$$

• Soustavu rovnic rozepíšeme:

$$\begin{aligned} (J_{xx} - J)\Omega_x + \quad & J_{xy}\Omega_y + \quad & J_{xz}\Omega_z = 0 \\ J_{xy}\Omega_x + \quad & (J_{yy} - J)\Omega_y + \quad & J_{yz}\Omega_z = 0 \\ J_{xz}\Omega_x + \quad & J_{yz}\Omega_y + \quad & (J_{zz} - J)\Omega_z = 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{vmatrix} J_{xx} - J & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{xy} & J_{xx} - J & J_{yz} \\ J_{xz} & J_{yz} & J_{xx} - J \end{vmatrix} = 0$$

Tuhé těleso – otáčení kolem pevného bodu – tenzor momentu setrvačnosti



• Rozepíšeme-li determinant dostaneme kubickou rovnici, která má tři reálné kořeny, pokud má tenzor momentu setrvačnosti reálné složky. Reálné kořeny (vlastní hodnoty) označíme:

$$J_1, J_2, J_3$$

• Pro každý kořen dostaneme z rovnice jeden vektor úhlové rychlosti (vlastní vektory). Tyto tři vektory jsou navzájem kolmé – **hlavní osy tenzoru setrvačnosti**:

$$\vec{\Omega}_1 \perp \vec{\Omega}_2 \perp \vec{\Omega}_3,$$

$$\vec{B}_k = J_k \vec{\Omega}_k, \quad tedy \quad \vec{B}_k \,//\, \vec{\Omega}_k \quad kde \quad k = 1,2,3$$

• Zvolíme-li soustavu souřadnou spjatou s tělesem ve směru těchto vektorů úhlových rychlostí (vlastních vektorů), potom jsou deviační momenty tenzoru setrvačnosti nulové. Momentům setrvačnosti ve směru hlavních os říkáme **hlavní momenty setrvačnosti** :

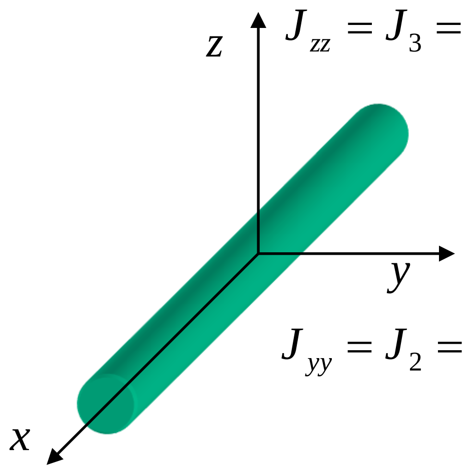
$$J_{xx} = J_1, \quad J_{yy} = J_2, \quad J_{zz} = J_3,$$

Moment setrvačnosti

- **hlavní osy** tenzoru setrvačnosti tělesa odpovídají význačným osám symetrie zkoumaného tělesa

- každé těleso má 3 navzájem kolmé osy procházející hmotným středem takové, že
  - *J* vůči jedné z nich je *největší* z hodnot vůči všem osám procházejících hmotným středem
  - *J* vůči další z nich je *nejmenší* z hodnot vůči všem osám procházejících hmotným středem

- př. Tyč délky *l* a kruhového průřezu o poloměru *r*:



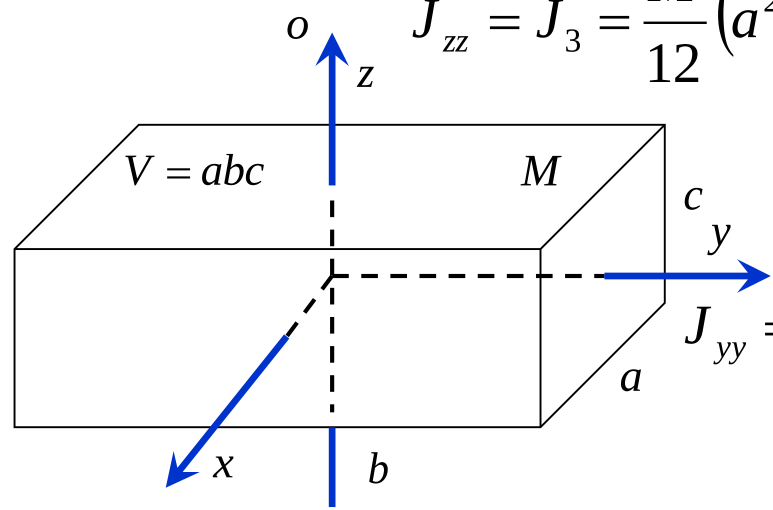
$$J_{zz} = J_3 = \frac{1}{12} M l^2$$

$$J_{yy} = J_2 = \frac{1}{12} M l^2$$

$$J_{xx} = J_1 = \frac{1}{2} M r^2$$

Kvádr o rozměrech *a*, *b*, *c*:

$$J_{zz} = J_3 = \frac{M}{12}\left(a^2 + b^2\right)$$



$$J_{yy} = J_2 = \frac{M}{12}\left(a^2 + c^2\right)$$

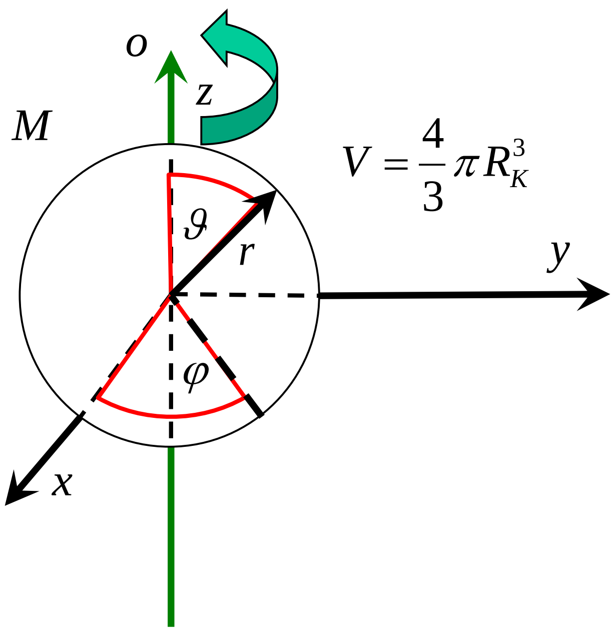
$$J_{xx} = J_1 = \frac{M}{12}\left(b^2 + c^2\right)$$

Moment setrvačnosti

• **hlavní osy** tenzoru setrvačnosti tělesa odpovídají význačným osám symetrie zkoumaného tělesa

• každé těleso má 3 navzájem kolmé osy procházející hmotným středem takové, že
- J vůči jedné z nich je *největší* z hodnot vůči všem osám procházejících hmotným středem
- J vůči další z nich je *nejmenší* z hodnot vůči všem osám procházejících hmotným středem

• př. Koule o poloměru R_K

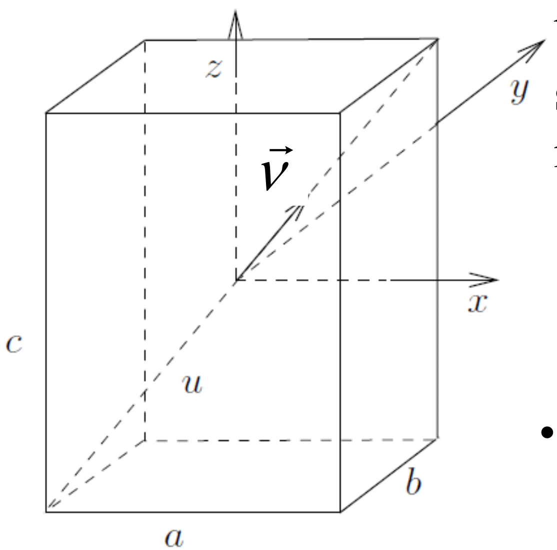


$$V = \frac{4}{3}\pi R_K^3$$

$$J_{zz} = J_{yy} = J_{xx} = \frac{2}{5} M R_K^2$$

$$J_1 = J_2 = J_3 = \frac{2}{5} M R_K^2$$

Tuhé těleso –moment setrvačnosti vůči libovolné ose tělesa



• Určíme si teď moment setrvačnosti vůči libovolné ose procházející bodem pro nějž známe tenzor setrvačnosti. Pokud zvolíme soustavu souřadnou v hlavních osách tenzoru momentu setrvačnosti budou nenulové pouze složky ležící na diagonále:

$$\overleftrightarrow{\boldsymbol{J}}_H = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{pmatrix}$$

• Průmět vektoru celkového momentu hybnosti do směru osy otáčení je stejná veličina jak v soustavě pevně spojené s tělesem, tak v soustavě pevné v prostoru:

$$\vec{v}\vec{B} = J\omega,\ tedy \sum_{i=x,y,z} v_i \beta_i = J\omega \Rightarrow \sum_{i=x,y,z} v_i \sum_{j=x,y,z} J_{ij}\Omega_j = J\omega,\ kde\ i, j = x, y, z$$

• Při otáčení kolem pevné osy má vektor úhlové rychlosti směr této osy:

$$\vec{\omega} = \vec{v}\omega,\ tedy\ \Omega_j = v_j\omega \Rightarrow J\omega = \omega \sum_{i=x,y,z} \sum_{j=x,y,z} v_i v_j J_{ij} \Rightarrow J = \sum_{i=x,y,z} \sum_{j=x,y,z} v_i v_j J_{ij}$$

• Jelikož jsou deviační složky nulové dostaneme:

$$J = v_x^2 J_1 + v_y^2 J_2 + v_z^2 J_3$$